

Hesaplamaya Dayalı Geometri

1. Giriş

Bir araştırma dalı olarak ortaya çıkışına diğer kuramsal alanlara nispeten yeni denilebilecek hesaplama dayalı geometri, günümüz dünyasında pek çok uygulama alanı bulmuştur. Kabaca k boyutlu bir uzayda geçen her türlü problem, hesaplanabilir geometrinin kapsamında denilebilir. Örneğin, bir harita üzerinde iki nokta arasındaki en kısa (ve doğal olarak engellerin içinden geçmeyen) yolu bulmak bu alanda sayılabilecek problemlerden bir tanesidir.

Geometrik çözümler, esnek yapıları dolayısıyla birbirinden bağımsız muhtelif alanlarda kullanılabilir. Bu uygulama alanları arasında en göze çarpanları şunlardır:

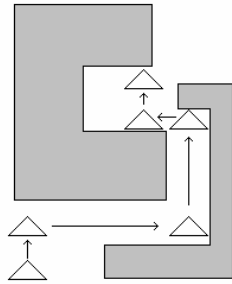
- Bilgisayar grafikleri,
- Katı modelleme,
- Bilgisayar destekli tasarım/üretim (CAD/CAM),
- Robot bilimi,
- Görüntü işleme ve tanıma, ve
- Çok büyük ölçekli bütünleşik devre (VLSI) tasarımı.

Mesela, 2-boyutlu bilgisayar grafiklerinde genel sorunlar kullanılan yapıların (çizgi, üçgen, vb...) birbirleriyle kesişimlerinin bulunması, verilen bir alan içinde kalan yapıların bulunması sayılabilir.

Bir üst boyuta, yani 3. boyuta çıktığımızdaysa karşımıza verilen bir sahnede görünmeyen yüzeylerin ayıklanması, nesnelere üzerine düşen gölgelerin hesaplanması ve hareketli nesnelere arasındaki çarpışmaların bulunması gibi meseleler çıkar.

Katı modellemeden kasıt, kesişim, birleşim ve çıkarım gibi işlemler kullanılarak ilkel yapılardan (küp, küre gibi) daha detaylı yapılar kurmak olup, bu noktada da nesnelere arasındaki kesişimlerin bulunuşu gibi yerlerde hesaplanabilir geometri çözüm rolünü üstlenir.

Bir başka örnek olarak robot bilimini ele alalım. Bir robotun engeller arasından yolunu bulup hedefine varması (hareket plânlaması) ya da endüstriyel bir robot kolunun belli kısıtlamalar içinde verilen görevi yapması için yine bu alanda geliştirilmiş algoritmalar kullanılmaktadır.



Şekil-1. Yol plânlama

Çok büyük ölçekli bütünleşik devre tasarımıdaysa sayıları yüzbinler, hatta milyonlarla ifade edilebilecek

devre bloklarını bir düzleme, hiçbirini bir diğerinin üzerine gelmeyecek şekilde yerleştirmek yine çözümünü bu alanda bulmuş bir sorundur.

Hesaplanabilir geometride karşımıza çıkan en önemli problemler şunlardır:

- Geometrik arama
 - Çokgen içermesi
 - Nokta konumu
 - Menzil tarama
- İçbükey çeper oluşturma (Convex hull)
- Nesnelere yakınlık bulma
- Üçgenlere ayırma
- Kesişim bulma

2. Geometrik Arama

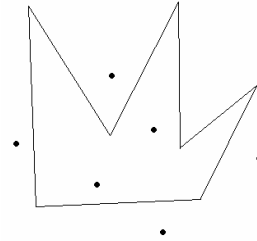
Biçimsel olarak geometrik aramayı, verilen geometrik nesnelere kümesi içinden, herhangi bir sorgu nesnesine bir ilişkiyle bağlanmış olan alt kümeyi bulmak olarak tarif edebiliriz.

Örneğin, verilen çokgenden ve nokta kümesinden yola çıkarak, hangi noktaların bu çokgen içinde bulunduğunu bulmak geometrik aramaya girer. Burada noktalar geometrik nesnelere kümesini, çokgen sorgu nesnesini, çokgenin içinde olmakta ilişkiyi temsil eder. Bu örnekteki problem çokgen içermesidir.

Bu problemleri çözmek için iki farklı yaklaşım vardır:

- **Tek sorgu:** Aranacak olan kümenin tek elemandan oluştuğu arama çeşididir. Kullan ve at şeklinde bir yaklaşımla, çok fazla ön işlem yapmadan, sorguyu bu tek nesneye göre hızlandırmak amaçtır. Ayrıca hafıza gereksinimi olarak en makul çözümdür. Ancak birden fazla sorgu yapılmak istendiğinde çok hantal kalır.
- **Yinelemeli sorgu:** Birden fazla eleman üzerinde sorgu yapılacaksa, sorgu nesnesinde ve aranacak elemanlarda belirli ön işlemler yapılarak toplam zaman karmaşıklığı düşürülebilir. Ancak bu da hafıza karmaşıklığını (genellikle) artırır.

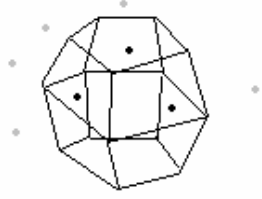
2.1 Çokgen İçermesi



Şekil-2. Noktaların çokgenin içinde ya da dışında oluşuna göre sınıflandırılması

Bu problem tipinde amaç, verilen bir çokgen için, hangi noktaların bu çokgenin içine düştüğü, hangilerinin dışına kaldığını ya da sayılarını bulmaktır.

Özellikle tek sorguyla yinelemeli sorgu arasında zamansal olarak belirgin bir fark vardır. Aynı zamanda çokgenin basit mi yoksa karmaşık mı (kendi kendini kesip kesmemesi), içbükey ya da dışbükey oluşuna göre değişik algoritmalar vardır.

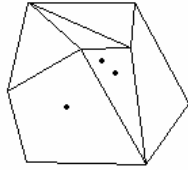


Şekil-3. Çok yüzlü içinde geometrik arama

Noktaların arandığı yapı illâki çokgen olmak zorunda değildir, Şekil 3'te de görüldüğü üzere çokyüzlü de olabilir.

2.2 Nokta Konumu

Burada amaç, sorgu noktalarının verilen bir haritanın hangi yüzlerine düştüğünün bulunmasıdır. Genellikle harita, düzlemsel doğru çizgesidir (PSLG – planar straight line graph).



Şekil-4. Noktaların, çizgede hangi yüzlerde olduğunun saptanması

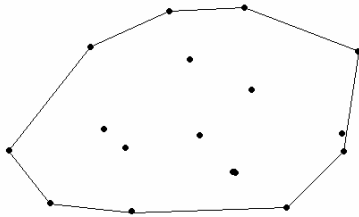
Burada da tek atımlık sorgu ve yinelemeli sorgu arasında zaman ve yer yönünden değişik karmaşıklıklara sahip algoritmalar vardır.

2.3 Menzil Tarama

Bazı durumlarda, çokgen içermesi probleminin biraz daha kısıtlı bir şekli karşımıza gelebilir. Örneğin, sorgulama nesnesi her zaman bir dikdörtgen olabilir. Elbette dikdörtgenin özelliklerini dikkate alarak daha iyi, daha hızlı algoritmalar bulmak mümkündür.

3. İçbükey Çeper Oluşturma

Verilen bir nokta kümesindeki tüm noktaları kapsayan içbükey çokgene/çokyüzlüye çeper denir. Burada amaç bu nokta kümesini kapsayan ve en küçük alana/hacime sahip çeperi bulmaktır.



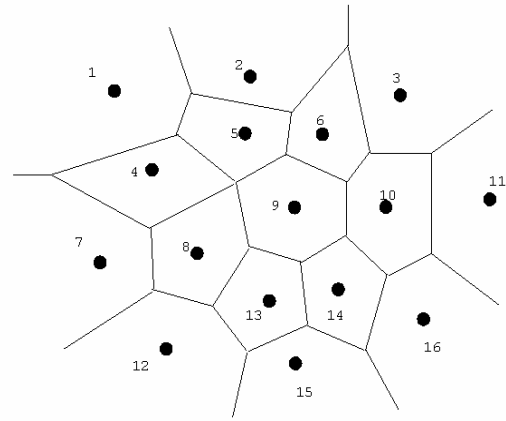
Şekil-5. Verilen bir nokta kümesi için içbükey çeper

4. Nesnelere arası yakınlık bulma (proximity)

Yakınlıktan kastın, herhangi bir uzaklık ölçüsü olabileceği bu problemde, genellikle Öklid uzaklığı ya da L-metrik uzaklığı kullanılır. İlk akla gelen problem verilen bir nokta kümesinde birbirine en yakın noktaları bulmaktır.

Bu sınıfa ait en ünlü yapı ise Voronoi çizeneğidir. Pek çok yerde uygulama alanı bulmuş olan Voronoi çizeneği, genel olarak tüm noktaların kendilerine yakınlık alanlarının bulunmasıyla ilgilidir. Bu nedenle Voronoi çizeneği nesnelere arası yakınlık ile ilgili tüm bilgiyi içermektedir.

Şekil 6'da örnek bir Voronoi çizeneği verilmiştir. Bu şekilden de görülebileceği gibi, mesela 1. noktaya ayrılmış bölgedeki bütün noktaların, Öklid uzaklığına göre, nokta kümesi içinden en yakın komşuları 1. noktadır.



Şekil-6. Voronoi çizeneği

Eğer yukardaki noktaları baz istasyonları olarak kabul edersek, baz istasyonlarının etki alanlarını (hangi alanda cep telefonu hangi istasyona bağlı) gösteren bir harita elde etmiş oluruz.

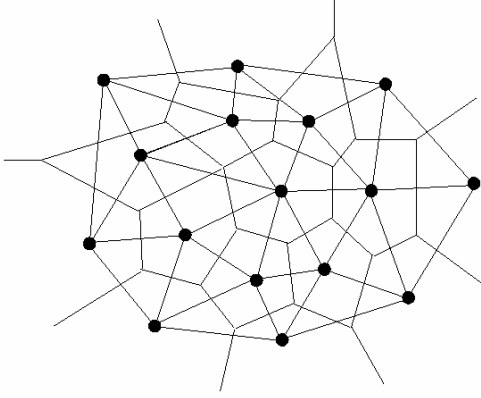
Ya da noktaları şehirdeki hastahaneler olarak alırsak, bir noktaya en yakın hastahanelerin nerede ve ne kadar uzakta olduğu bu haritaya bakarak kolaylıkla söylenebilir.

5. Üçgenlere ayırma

Burada amaç, verilen noktaları köşeleri olarak kabul eden ve tüm nokta kümesini kapsayan üçgenler bulmaktır.

Mesela, bir kara parçasının uydurucu aracılığıyla çeşitli noktalardaki yükseklikleri bulunduktan sonra, bu veriyi kullanarak sanal arazi benzeşimi yapmak için, bu noktaları bağlayan üçgenleri bulmak gerekir.

Üçgenlere ayırma deyince ilk akla gelen Delaunay üçgenlemesi (Delaunay Triangulation)'dir. Bu yöntem, tüm üçgenler içindeki en küçük açının en büyük olduğu üçgenlemeyi bulur. Diğer bir deyişle, elde edilen üçgenler eşkenara yakın üçgenlerdir. Voronoi çizeneğinin eşleniği olup, bir Voronoi çizeneğinden yola çıkarak Delaunay üçgenlemesine doğrusal zamanda erişilebilir.



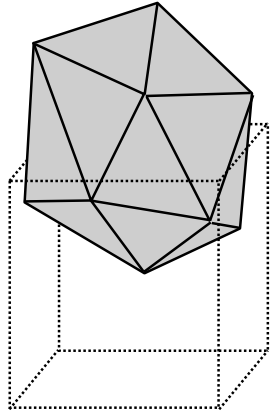
Şekil-7. Delaunay üçgenlemesi

6. Kesişim Bulma

Son olarak ele alınacak problem kümesi, kesişim bulmaya dayalı olanlar olacaktır. Bu algoritmalar, bilgisayar grafiklerinde üçgenlerin görünen kısımlarının çıkartılmasında, çok büyük ölçekli devre tasarımında üstüste gelen parçaların bulunmasında, çizge görselleştirilmesinde kullanılmaktadır.

Çok büyük ölçekli devre tasarımında, devre daha küçük bileşenlere ayrılır ve en sonunda bunlar bir düzlem üzerine yerleştirilir. Ancak bu yerleştirme işlemi esnasında, herhangi iki bileşen arasında istenmeyen kesişimler ya da üstüste gelmeler olabilir. Bunlardan kaçınmak için de olası yerleştirme plânlarında kesişim bulma algoritmaları kullanılır.

Bir başka kesişim bulma işide, katı modellemede karşımıza çıkar. Burada amaç verilen (genellikle 3-boyutlu) nesnelere arasında küme işlemlerini kullanarak (kesişim, bileşim, çıkartma gibi) yeni nesnelere elde etmektir.



Şekil-8. İki çokyüzlünün kesişimi

7. Özet

Hesaplama dayalı geometri, son yıllarda adından sıkça söz ettiren bir dal haline gelmiş, bilgisayar grafiklerinden çok büyük ölçekli devre tasarımına kadar pek çok alanda kullanım bulmuştur. Problem tipleri genellikle uzayda verilen nesnelere arasında belirli bir ilişkiye sahip olanları bulmaya (örneğin, en yakın uzaklığa sahip olanları) ya da verilen nesnelere üzerinden başka bir yapı elde etmeye (Voronoi çizeneği gibi) yöneliktir.

Kullanılan algoritmaların yapısı ve hızı da, amaca göre çok büyük değişiklikler arz edebilir. Örneğin, sadece bir noktanın çokgen içinde olup olmadığına bakılacaksa, tüm kenarlarını sınamak en verimli yöntemken, birden fazla nokta varsa, çokgeni özel işlemlerden geçirip sorgu süresini oldukça azaltmak mümkündür.

Hesaplama dayalı geometride en çok kullanılan yapılar Voronoi çizeneği ve Delaunay üçgenlemesidir. Yapay zekâdan günlük hayattaki pek çok sorunun çözümünde büyük rol oynarlar.

KAYNAKLAR

- [1] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf, *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, Revised Second Edition, 2000.
- [2] F.P. Preparata and M.I. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction*, Springer-Verlag, 1985.

Uğur Güdükbay, Ali Kemal Sinop

[Bilkent Üniversitesi, Ankara]